

# Lista 10

## Nierówności

Instytut Matematyczny UWr

Zajęcia uniwersyteckie SP76 klasa 8E

Udowodnij, że podane nierówności są prawdziwe dla każdych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ . Kiedy zachodzi równość?

**1.**  $2xy \leq x^2 + y^2$     **2.**  $4xy \leq x^2 + 4y^2$     **3.**  $xy \leq x^2 + \frac{y^2}{4}$     **4.**  $70xy \leq 25x^2 + 49y^2$

Czy dla każdych liczb całkowitych dodatnich  $x$  i  $y$  prawdziwa jest nierówność:

**5.**  $2025xy \geq x^2 + y^2$

Udowodnij, że podane nierówności są prawdziwe dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Kiedy zachodzi równość?

**6.**  $20x \leq x^2 + 100$     **7.**  $20x \leq 100x^2 + 1$     **8.**  $20x \leq 10x^2 + 10$     **9.**  $20x \leq 25x^2 + 4$

Udowodnij, że nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ . Kiedy zachodzi równość?

**10.**  $12x^2y^3 \leq 4x^4 + 9y^6$

Udowodnij, że podane nierówności są prawdziwe dla każdych liczb całkowitych dodatnich  $m$  i  $n$ .

**11.**  $2mn \leq m^3 + n^3$     **12.**  $m^2n^2 \leq m^4 + n^5$     **13.**  $4m^2n^2 \leq 4m^5 + n^5$

Udowodnij, że podane nierówności są prawdziwe dla każdych liczb rzeczywistych  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Kiedy zachodzi równość?

**14.**  $30x^2y^3z^5 \leq 225x^4y^6 + z^{10}$     **15.**  $30x^2y^3z^5 \leq 25x^4z^{10} + 9y^6$   
**16.**  $2xy + 2yz \leq x^2 + 2y^2 + z^2$     **17.**  $4xy + 4yz \leq 4x^2 + 2y^2 + 4z^2$   
**18.**  $4xy + 4yz \leq 4x^2 + 5y^2 + z^2$     **19.**  $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych  $x$ ,  $y$ , dla których spełnione są podane równania.

**20.**  $2xy + 2y = x^2 + 2y^2 + 1$     **21.**  $4xy + 4y = x^2 + 5y^2 + 4$   
**22.**  $4xy + 4y = x^2 + 8y^2 + 1$     **23.**  $4x + 4y = x^2 + y^2 + 8$   
**24.**  $4x + 4y = 4x^2 + y^2 + 5$     **25.**  $2x + 2y = 2x^2 + 2y^2 + 1$

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste  $x$  dla których spełnione są poniższe nierówności.

**26.**  $x^2 - 3 \leq 2x$       **27.**  $x^2 - 2 \leq x$       **28.**  $x^4 - 5 \leq 4x^2$       **29.**  $x^4 + 15 \leq 8x^2 + 8x$

---

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ . Kiedy zachodzi równość?

**30.**  $2xy + 2x^2y \leq x^4 + x^2 + 2y^2$

---

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych  $x, y$ , dla których spełnione są podane równania.

**31.**  $4xy + 2x^2y = x^4 + 4x^2 + 2y^2$       **32.**  $6x^3 + 6xy = x^4 + 18x^2 + y^2$

---

Rozłóż podane wyrażenie na iloczyn dodając i odejmując odpowiednie wyrażenie i korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

**33.**  $x^4 + 4y^4 = x^4 + \dots x^2y^2 + 4y^4 - \dots x^2y^2 = (\dots)^2 - (\dots)^2 = (\dots) \cdot (\dots)$

**34.**  $x^4 + x^2y^2 + y^4$     **35.**  $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$     **36.**  $x^4 - 12x^2y^2 + 4y^4$     **37.**  $x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$

---

**38.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 > 1 + \frac{3}{n}.$$

**39.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq 1 + \frac{7}{n}.$$

**40.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 4$  zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 < 1 + \frac{5}{n}.$$

**41.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 4$  zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 < 1 + \frac{4}{n}.$$