

Lista 11

Reszty kwadratowe

Wymień wszystkie reszty jakie może dawać ...

1. ...kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3.
2. ...kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 4.
3. ...kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 5.
4. ...kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8.
5. ...suma dwóch kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8.
6. ...suma trzech kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8.
7. ...sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7.
8. ...sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9.
9. ...suma dwóch sześciánów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 7.
10. ...suma dwóch sześciánów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 9.
11. ...suma trzech sześciánów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 9.
12. Czy kwadrat liczby całkowitej może mieć sumę cyfr równą 2018?
13. Czy sześcián liczby całkowitej dodatniej może mieć sumę cyfr równą 2023?

Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m , n i k , że:

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| 14. $2m^2 + 1 = n^2$ | 15. $m^2 + 1 = 3n^2$ | 16. $5m^2 + 2 = n^2$ | 17. $2m^2 + 5 = 3n^2$ |
| 18. $7m^2 + 1 = n^2$ | 19. $7m^2 + 2 = n^2$ | 20. $7m^3 + 2 = n^3$ | 21. $9m^3 + 2 = n^3$ |
| 22. $m^2 + n^2 = 1\,000\,003$ | 23. $m^3 + n^3 = 7\,000\,003$ | | |
| 24. $m^2 + n^2 = 1\,000\,006$ | 25. $m^2 + n^2 + k^2 = 1\,000\,007$ | | |
| 26. $m^3 + n^3 = 1\,000\,003$ | 27. $m^3 + n^3 + k^3 = 1\,000\,003$ | | |
| 28. $m^2 = n^2 + 2$ | 29. $m^2 = n^2 + n + 1$ | | |

Wyznacz wszystkie nieujemne liczby całkowite n dla których:

30. liczba $n^2 + 3n + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej,

31. liczba $n^2 + 5$ jest kwadratem liczby całkowitej,

32. liczba $n^2 + 5n + 13$ jest kwadratem liczby całkowitej,

33. liczba $n^4 + 3n^2 + 4$ jest kwadratem liczby całkowitej,

34. liczba $n^4 + 5n^2 + n + 9$ jest kwadratem liczby całkowitej,

35. liczba $n^4 + 4n^2 + 4n + 15$ jest kwadratem liczby całkowitej,

36. liczba $n^4 + 2n^2 + 4n + 4$ jest kwadratem liczby całkowitej,

37. liczba $n^4 + 2n^3 - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej,

38.* Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb **całkowitych**, dla których spełnione jest równanie

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1.$$

39. Czy istnieje liczba naturalna n , dla której liczba $n^2 + 9n + 20$ jest kwadratem liczby całkowitej?

40. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p + 1$ też jest pierwsza.

41. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ też jest pierwsza.

42. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczby $p + 2$ i $p + 4$ też są pierwsze.

43. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczby $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$ i $p + 14$ też są pierwsze.

44. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczby $p^2 + 4$ i $p^2 + 6$ też są pierwsze.

45. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczby $p^3 + 6$ i $p^3 + 50$ też są pierwsze.

46. Jeśli podzielić x osób na 3-osobowe grupy, to zostanie 1 osoba. Przy podziale na 5-osobowe grupy zostaną 3 osoby, a w przypadku podziału na 7-osobowe grupy zostaną 2 osoby. Ile wynosi x , jeśli wiadomo, że jest mniej niż 100 osób?

47. Znajdź wszystkie liczby naturalne mniejsze od 100, które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 3, 4, 5 i 7.

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (zadania przygotowawcze WKM 2018/2019) Wyznaczyć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych takich, że $pq + 1$ i $pq - 1$ też są liczbami pierwszymi.

K2. (2 etap OMJ 2009/2010) Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \quad \text{oraz} \quad n^2 + n + 3$$

są pierwsze.

K3. (finał OMJ 2014/2015) Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + 2b + 1 \quad \text{oraz} \quad b^2 + 2a + 1$$

są kwadratami liczb naturalnych. Wykaż, że $a = b$.