

Lista 2

Dowody geometryczne i kąty

1. Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° .
 2. Wykaż, że w trójkącie ABC miara kąta zewnętrznego przy wierzchołku A jest równa sumie miar kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C .
 3. Udowodnij, że jeśli kąty AXB i BXC są przyległe, to ich dwusieczne są prostopadłe.
 4. Udowodnij, że jeśli kąty AXB i CXD są wierzchołkowe, to ich dwusieczne leżą na tej samej prostej.
 5. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC . Udowodnij, że $\sphericalangle AOB > \sphericalangle ACB$.
 6. W trójkącie ABC zaznaczono punkt D na przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B . Wiedząc, że $\sphericalangle ACB = 70^\circ$, oblicz miarę kąta ADB .
 7. W trójkącie ABC zaznaczono punkt D na przecięciu dwusiecznych kąta wewnętrznego przy wierzchołku A i kąta zewnętrznego przy wierzchołku B . Wiedząc, że $\sphericalangle ACB = 80^\circ$, oblicz miarę kąta ADB .
- Własność 1.** W trójkącie ABC zachodzi $AC = BC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$.
8. Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Odcinek AH jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle BAH$.
 9. Udowodnij, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.
 10. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $AC = BC$ zaznaczono punkt D , który jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C , punkt E , który jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A oraz punkt F na przecięciu wysokości CD i AE . Wiedząc, że $\sphericalangle ACD = 15^\circ$, oblicz miarę kąta DFE .
 11. Na boku AB trójkąta ABC zaznaczono punkt D w taki sposób, że zachodzą równości $AC = CD = DB$. Oblicz miarę kąta ABC , wiedząc, że $\sphericalangle ACB = 66^\circ$.
 12. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ zaznaczono punkt E w taki sposób, że zachodzą równości $AE = BE = AB$. Oblicz miarę kąta CDE .

13. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D . Niech E będzie punktem przecięcia prostej prostopadłej do AB przechodzącej przez D z prostą AC . Wykaż, że jeśli $AC = BC$, to trójkąt CDE jest równoramienny.

14. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zaznaczono taki punkt E , że trójkąt CDE jest równoboczny. Punkt K jest punktem przecięcia prostych AE i CD . Oblicz miarę kąta CKE .

15. Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych w:

- a) czworokącie?
- b) pięciokącie?
- c) sześciokącie?
- d) siedmiokącie?
- e) ośmiokącie?

16. Ile wynosi miara jednego kąta w:

- a) pięciokącie foremnym?
- b) sześciokącie foremnym?
- c) ośmiokącie foremnym?
- d) dziewięciokącie foremnym?
- e) dziesięciokącie foremnym?

17. Odcinek CD jest wspólnym bokiem kwadratu $ABCD$ i pięciokąta foremnego $CDEFG$. Oblicz miarę kąta DAE .

18. Odcinek CD jest wspólnym bokiem kwadratu $ABCD$ i sześciokąta foremnego $CDEFGH$. Oblicz miarę kąta DAE .

19. Odcinek CD jest wspólnym bokiem kwadratu $ABCD$ i dziewięciokąta foremnego $CDEFGHIJK$. Oblicz miarę kąta DAE .

20. Przekątna AC kwadratu $ABCD$ jest bokiem pięciokąta foremnego $ACEFG$. Oblicz miarę kąta DCF .

21. Przekątna AC pięciokąta foremnego $ABCDE$ jest bokiem kwadratu $ACFG$. Oblicz miarę kąta BAG .

22. Wewnątrz pięciokąta foremnego $ABCDE$ zaznaczono punkty F i G takie, że czworokąt $ABFG$ jest kwadratem. Oblicz miarę kąta GED .

23. Wewnątrz pięciokąta foremnego $ABCDE$ zaznaczono punkt F taki, że trójkąt ABF jest równoboczny. Oblicz miarę kąta CFD .

Własność 2. Punkt C leży na symetralnej odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BC$.

Własność 3. Punkt D leży na dwusiecznej kąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy odległości punktu D od prostej AB i od prostej BC są równe.

24. Udowodnij, że w każdym trójkącie ostrokątnym istnieje punkt, który jest równoodległy od wszystkich jego wierzchołków.

25. Udowodnij, że w każdym trójkącie istnieje punkt, który jest równoodległy od wszystkich jego boków.

26. W trójkącie ABC symetralna boku AC dwusieczna kąta BAC przecinają się w punkcie, który leży na boku BC . Wykaż, że $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle ACB$.

27. W czworokącie $ABCD$ zachodzi równość $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$. Punkt M leży na przecięciu prostych AB i CD , a punkt N na przecięciu prostych AD i BC . Punkt X leży na przecięciu dwusiecznych kątów AMC i ANC . Wykaż, że $\sphericalangle MXN = 90^\circ$.

28.* Punkt O leży na przecięciu symetralnych boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Wykaż, że jeśli proste AO i CD są prostopadłe oraz proste CO i AD są prostopadłe, to trójkąt ACD jest równoramienny.

29. Punkt M jest środkiem boku AC trójkąta ABC . Wykaż, że jeśli $AM = BM$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

30. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC . Wykaż, że $AM = BM$.

Własność 4. Trójkąt jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy środek jednego z boków trójkąta jest równoodległy od wszystkich jego wierzchołków.

31. Oblicz miary kątów deltoidu $ABCD$ w którym

$$AB = AD = \frac{1}{2}AC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ.$$

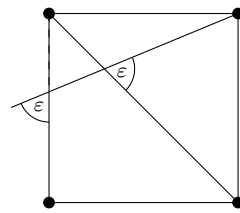
Wskazówka: zaznacz środek przekątnej AC .

32. W pewnym czworokącie przekątne przecinają się pod kątem prostym. Punkty K, L, M, N są środkami jego boków, a I punktem przecięcia przekątnych. Wykaż, że odcinki IK, IL, IM, IN dzielą ten czworokąt na cztery deltoidy.

33. W czworokącie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem przekątnej BD . Dodatkowo $\sphericalangle DAB = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$. Oblicz ile razy dłuższa jest przekątna AC niż przekątna BD .

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (Náboj 2017/2018) Jeśli $ABCD$ to kwadrat, to jaka jest miara kąta ε ?

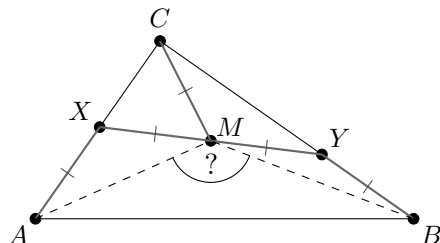


Rysunek do zadania K1

K2. (1 etap OMJ 2023/2024) Punkty X oraz Y leżą odpowiednio na bokach AC oraz BC trójkąta ABC . Punkt M jest środkiem odcinka XY . Załóżmy, że

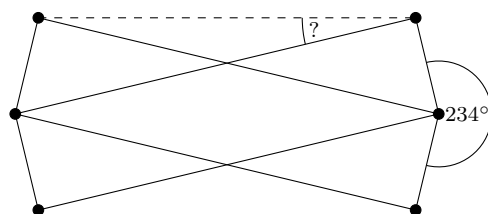
$$AX = MX = MC = MY = BY.$$

Wyznacz miarę kąta AMB .



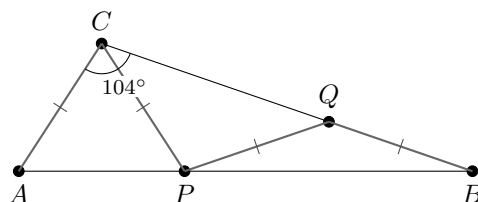
Rysunek do zadania K2

K3. (Náboj 2018/2019) Jeden z kątów trójkąta prostokątnego jest równy 23° . Wyznacz miarę (w stopniach) kąta między środkową a wysokością tego trójkąta opuszczonych z wierzchołka kąta prostego.



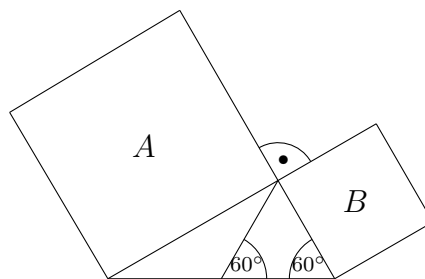
Rysunek do zadania K4

K4. (Náboj 2023/2024) Na rysunku widoczne są dwa identyczne prostokąty oraz zaznaczony kąt o mierze 234° . Wyznacz miarę (w stopniach) kąta zaznaczonego znakiem zapytania.



Rysunek do zadania K5

K6. (zDolny Ślązak, 2 etap 2019/2020) Na rysunku przedstawiono kwadraty A i B . Ile razy pole kwadratu A jest większe od pola kwadratu B ?



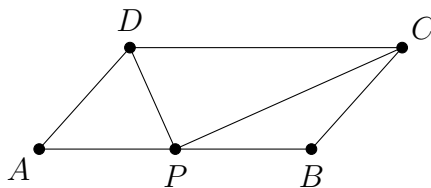
Rysunek do zadania K6

K7. (2 etap OMJ 2022/2023) Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty D i E , że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle AED.$$

Wykaż, że $AE = BE$.

K8. (Wroc. Konkurs Matematyczny 2021/2022) W równoległoboku $ABCD$ środek P boku AB połączono z wierzchołkami D i C (rysunek). Wiadomo, że $DP = 5\text{cm}$ i $PC = 12\text{cm}$ oraz $AB = 2BC$. Oblicz obwód tego równoległoboku.



Rysunek do zadania K8