

Lista 8

Kongruencje

Oznaczenie: $a \equiv b \pmod{k}$ oznacza, że liczby całkowite a i b dają taką samą resztę z dzielenia przez k .

1. Udowodnij, że $a \equiv a + k \pmod{k}$.
2. Udowodnij, że $a \equiv b \pmod{k} \iff k \mid a - b$.

Założmy, że $a \equiv b \pmod{k}$ oraz c jest liczbą całkowitą.

3. Udowodnij, że $a + c \equiv b + c \pmod{k}$.
4. Udowodnij, że $a - c \equiv b - c \pmod{k}$.
5. Udowodnij, że $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{k}$.
6. Czy jeśli $a : c$ i $b : c$ są liczbami całkowitymi, to $a : c \equiv b : c \pmod{k}$?
7. Oblicz resztę z dzielenia 22^6 przez 20.
8. Oblicz resztę z dzielenia liczby 27^{11} przez 13.
9. Oblicz resztę z dzielenia 5^{22} przez 24.
10. Oblicz resztę z dzielenia liczby 10^8 przez 97.
11. Oblicz resztę z dzielenia liczby 2^{21} przez 125.
12. Oblicz resztę z dzielenia liczby 5^{12} przez 128.
13. Oblicz resztę z dzielenia liczby 3^{100} przez 13.
14. Oblicz resztę z dzielenia liczby 2^{128} przez 31.
15. Oblicz resztę z dzielenia liczby 3^{103} przez 41.
16. Oblicz resztę z dzielenia liczby 2024^{2024} przez 25.
17. Wiedząc, że $2^7 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{641}$ i $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$. Udowodnij bez wykonywania zbędnych obliczeń, że $2^{32} \equiv -1 \pmod{641}$.
18. Udowodnij, że $2^{70} + 3^{70}$ jest podzielna przez 13.
19. Udowodnij, że $2^{90} - 1$ jest podzielna przez 31.

20. Udowodnij, że $7^{99} - 1$ jest podzielna przez 19.
21. Udowodnij, że $3^{60} + 5^{70}$ jest podzielna przez 13.
22. Udowodnij, że $6^{99} + 4^{74} + 1$ jest podzielna przez 43.
23. Znajdź przykład takich dwucyfrowych m i n , że $5^m + 4^n + 2$ jest podzielne przez 31.
24. Znajdź przykład takich dwucyfrowych m i n , że $18^m + 7^n$ jest podzielne przez 19.
25. Znajdź przykład takich dwucyfrowych m i n , że $6^m + 4^n + 3$ jest podzielne przez 43.
26. Znajdź przykład takich dwucyfrowych m i n , że $10^m + 6^n$ jest podzielne przez 37.
27. Udowodnij, że jeśli $7 \mid a^2 + b^2$, to $7 \mid a$ i $7 \mid b$.
28. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (s, t) spełniające równanie $s^2 = t^2 + 2023$ lub udowodnij, że żadna taka para nie istnieje.
- 29.* Udowodnij, że $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 12^n$ jest podzielne przez 13 dla dowolnej liczby nieparzystej n .
30. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $36^{17} - 5^{17}$.
31. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{17} + 5^{17}$.
32. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{33} - 2^{22}$.
33. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{22} + 5^{22}$.
34. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $17^{26} - 2^{26}$.
35. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $2^{21} - 1$ mniejszy od 100.
36. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{21} - 1$ mniejszy od 100.
37. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{51} - 2^{51}$ mniejszy od 100.
38. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{51} + 1$ mniejszy od 100.
39. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{25} - 1$.
40. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{25} + 1$.
41. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{35} + 1$.
42. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{49} + 1$.
43. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $31^{36} - 21^{36}$.

Własność 1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b i n :

jeśli n jest nieparzyste, to

- $a^n + b^n$ jest podzielne przez $a + b$ (gdy $a + b > 0$);
- $a^n - b^n$ jest podzielne przez $a - b$ (gdy $a - b > 0$);

jeśli n jest parzyste, to

- $a^n - b^n$ jest podzielne przez $a + b$ (gdy $a + b > 0$);
- $a^n - b^n$ jest podzielne przez $a - b$ (gdy $a - b > 0$);

Własność 2. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b oraz dowolnej parzystej, niepodzielnej przez 4 liczby naturalnej n , liczba $a^n + b^n$ jest podzielna przez $a^2 + b^2$.

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (1 etap OMJ 2024/2025) Liczby całkowite a, b, c są większe od 1 i mają tę własność, że liczby

$$a, \quad a + b, \quad a + b + c, \quad b + c, \quad c$$

są pierwsze. Wykaż, że liczba b jest podzielna przez 3.

K2. (1 etap OMJ 2023/2024) Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n , że liczba $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{99\dots9}_n$ jest pierwsza.

K3. (1 etap OMJ 2018/2019) Liczbę naturalną n pomnożono przez 3, otrzymując w wyniku liczbę 999^{1000} . Wyznacz cyfrę jedności liczby n .

K4. (1 etap OMJ 2020/2021) Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, których suma jest równa 2^{1002} , a iloczyn jest równy 5^{1002} ? Odpowiedź uzasadnij.

K5. (matura podstawowa 2023/2024) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

K6. (2 etap OMJ 2024/2025) Liczbę całkowitą nazwiemy *olimpijską*, jeśli można ją uzyskać z liczby 1 w wyniku wykonania pewnej liczby operacji polegających na zwiększeniu liczby o jej cyfrę jedności. Początkowymi liczbami olimpijskimi są więc 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, ... Wykaż, że kwadrat liczby olimpijskiej jest liczbą olimpijską.