

Lista 12

Niezmienniki

1. Mamy 111 zapalek. W jednym ruchu możemy zabrać lub dołożyć 2 zapalki. Czy wykonując pewną liczbę takich ruchów możemy zabrać wszystkie zapalki?
2. Mamy 1 kartkę papieru. W każdym ruchu możemy wybrać sobie kartkę i rozciąć ją na 4 części. Czy po pewnym czasie możemy otrzymać dokładnie 2024 kartek papieru?
3. Na początku gry na tablicy zapisano liczbę 6. W każdym ruchu możemy pomnożyć liczbę zapisaną na tablicy przez 2 lub odjąć od niej 6. Czy na tablicy może pojawić się liczba pierwsza?
4. Na tablicy zapisano dziesięć znaków "+" i piętnaście znaków "-". W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i zapisujemy na tablicy "+", gdy znaki były takie same, oraz "-", jeśli były różne. W końcu, na tablicy zostanie tylko jeden znak. Jaki?
5. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2024. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy różnicę. Postępujemy tak do momentu, gdy zostanie nam jedna liczba. Czy może nią być liczba 45?
6. Mamy liczbę 2024!. Ruch polega na zastąpieniu tej liczby jej sumą cyfr. W pewnym momencie otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba?
7. Czy w wyrażeniu $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 10$ można zamienić niektóre znaki + na - w ten sposób, by wynik był równy 0?
8. Na płaszczyźnie zaznaczone są trzy punkty tworzące trójkąt o bokach długości 2, 3, 4. Ruch polega na zastąpieniu jednego z tych punktów symetrycznym względem jednego z pozostałych. Czy po wykonaniu pewnej liczby takich ruchów możemy otrzymać trójkąt o bokach długości 4, 6, 8.
9. Na tablicy narysowana jest 1 kreska. W jednym ruchu możemy podwoić liczbę narysowanych kresek lub zmazać 3 kreski. Czy możemy doprowadzić do sytuacji w której na tablicy nie zostanie żadna kreska?
10. Na tablicy narysowana jest 1 kreska i 1 kropka. W jednym ruchu możemy zmazać kropkę i dorysować 2 kreski lub zmazać kreskę i dorysować 3 kropki. Czy możemy doprowadzić do sytuacji w której na tablicy zostanie dokładnie 20 kresek?
11. Na stole leży 1 czerwona kulka. W jednym ruchu możemy zastąpić czerwoną kulkę 2 zielonymi, zastąpić zieloną 2 niebieskimi lub zastąpić niebieską 4 czerwonymi. W dowolnym momencie możemy także usunąć (na raz) 5 niebieskich kulek. Czy możemy doprowadzić do sytuacji, w której na stole nie będzie żadnych kulek?

12. W pewnej grze występują 4 rodzaje przedmiotów A, B, C D. Grę zaczynamy mając po dwie sztuki każdego z nich. W dowolnym momencie gry możemy wymienić:

1) $AA \longrightarrow BBB$

4) $AC \longrightarrow DB$

2) $BB \longrightarrow CCC$

5) $ABC \longrightarrow DD$

3) $DDD \longrightarrow ABB$

6) $BBD \longrightarrow ACC$

Czy w pewnym momencie gry możemy mieć przynajmniej 6 przedmiotów rodzaju A?

13. Dany jest 13-kąt foremny. Czy można w taki sposób narysować niektóre przekątne tego 13-kąta, aby z każdego jego wierzchołka wychodziły dokładnie trzy narysowane przekątne?

14. Na szachownicy możemy pomalować na czerwono 25 pól. Czy jest możliwe, aby każde zamalowane pole sąsiadowało z nieparzystą liczbą zamalowanych pól (dwa pola sąsiadują ze sobą jeśli mają wspólny bok).

15. Czy szachownicę o wymiarach 8×8 , z której usunięto lewe dolne oraz prawe górne pole, można pokryć kostkami domina o wymiarach 1×2 ?

16. Czy konik szachowy może przejść przez wszystkie pola szachownicy 8×8 , stając na każdym dokładnie raz, jeśli zaczyna w lewym dolnym rogu i kończy w prawym górnym?

17. Na szachownicy o wymiarach 9×9 na każdym polu leży jedna moneta. Przesuwamy każdą z monet na pole graniczące bokiem z tym, na którym leżała do tej pory (na jednym polu może leżeć dowolnie dużo monet). Czy to możliwe, że znów na każdym polu leży moneta?

18. Czy szachownicę o wymiarach 10×10 można pokryć figurami ?

19. Mamy 2 stosy po 10 kamieni. W jednym ruchu możemy zabrać 2 kamienie z wybranego stosu oraz dołożyć 1 kamień na drugi stos. Czy za pomocą takich ruchów możemy doprowadzić do sytuacji w której jeden stos będzie pusty, a na drugim będzie tylko 1 kamień?

20. Na pewnej wyspie mieszka 17 kameleonów czerwonych, 15 zielonych i 13 niebieskich. Jeśli spotkają się dwa kameleony o różnych kolorach, to oba zmieniają kolor na trzeci. Czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie wszystkie kameleony na wyspie będą tego samego koloru?

21. Czy szachownicę o wymiarach 8×8 z usuniętym polem narożnym można pokryć prostokątami o wymiarach 1×3 ?

22. Na szachownicy 8×8 ułożono 21 klocek o wymiarach 1×3 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 3 pola. Które z pól mogło pozostać wolne?

- 23.** Czy szachownicę o wymiarach 10×10 można pokryć prostokątami o wymiarach 1×4 ?
- 24.** Czy prostokątami 1×7 i 1×9 można pokryć szachownicę 11×11 ?
- 25.** Ile maksymalnie prostokątów 1×7 można wyciąć z szachownicy 10×10 , tnąc tylko po bokach pól?
- 26.** Czy szachownicę o wymiarach 10×10 można pokryć prostokątami o wymiarach 1×2 w taki sposób, by dokładnie połowa z nich była ustawiona poziomo?
- 27.** Czy szachownicę o wymiarach 13×13 można pokryć przy użyciu kwadratów o wymiarach 2×2 oraz 3×3 ?
- 28.** Wokół okrągłego stołu siedzi 10 dzieci. Na początku przed jednym z dzieci leży 10 ciastek. W jednym ruchu jedno z dzieci, które ma przynajmniej 2 ciastka, przekazuje po jednym ciastku dziecku z lewej i dziecku z prawej. Czy może się tak zdarzyć, że po pewnej liczbie ruchów każde z dzieci będzie miało dokładnie jedno ciastko?
- 29.** Na tablicy napisano liczby od 1 do 100. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczby $a + 1$ i $b - 1$. Czy wykonując dozwolone ruchy można doprowadzić do tego, że wszystkie liczby napisane na tablicy będą równe?
- 30.** Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od -100 do 100 . W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab + a + b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?
- 31.** Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\sqrt{a^2 + b^2}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?
- 32.** Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\frac{ab}{a+b}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?
- 33.** Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $a + b + 2\sqrt{ab}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?
- 34.** Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów. Udowodnij, że można tak narysować n odcinków, aby każdy punkt był końcem odcinka oraz by odcinki nie przecinały się.

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (GMiL 2013/2014) Na Math-Wyspie w danej chwili znajduje się 20 niebieskich kameleonów, 14 białych i 10 czerwonych. Gdy dwa kameleony różnych kolorów spotykają się, wówczas ich dwa kolory zmieniają się na trzeci kolor. Kameleon nie może zmienić koloru w inny sposób. Ile, co najmniej, spotkań między dwoma kameleonami będzie potrzebnych, aby wszystkie 44 kameleony miały ten sam kolor? Jeśli taka sytuacja jest niemożliwa, wpisz w kartę odpowiedzi 0.

K2. (finał OMJ 2021/2022) W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwne. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

K3. (GMiL 2022/2023) Mathilde i Mathias grają kładąc na przemian kostki domina na dwóch wolnych polach (stykających się jednym bokiem) kwadratowej szachownicy o 64 polach. Gracz, który nie jest w stanie wykonać ruchu przegrywa. W pewnej partii udało im się ułożyć maksymalną liczbę 32 kostek. Jaka jest najmniejsza łączna liczba kostek na szachownicy, przy której nie ma już ruchu?

K4. (1 etap OM 2004/2005) Na okręgu jest umieszczonych n lampek; każda może być włączona albo wyłączona. Wykonujemy serię ruchów; w każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone. Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k \leq n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.