

Lista 3

Wzory skróconego mnożenia

Instytut Matematyczny UWr

Zajęcia uniwersyteckie SP76 klasa 7E

1. Czy liczba 9991 jest pierwsza czy złożona?
2. Uporządkuj rosnąco następujące liczby:
 2026^2 , $2023 \cdot 2029$, $2025 \cdot 2027$, $2024 \cdot 2028$.
3. Wiadomo, że $a + b = 10$ oraz $a \cdot b = 5$. Oblicz $a^2 + b^2$.
4. Wiadomo, że $a - b = 2$ oraz $a^2 + b^2 = 9$. Oblicz $a \cdot b$.
5. Wiadomo, że $a + b = 3$ oraz $a^2 - b^2 = 6$. Oblicz $a - b$.
6. Wiadomo, że $a + b = 5$ oraz $a \cdot b = 2$. Oblicz $a^3 + b^3$.
7. Wiadomo, że $a + b = 3$ oraz $a^2 + b^2 = 7$. Oblicz $a^3 + b^3$.
8. Wiadomo, że $a^2 + b^2 = 11$ oraz $a \cdot b = 5$. Oblicz $a^4 + b^4$.
9. Wiadomo, że $a^2 - b^2 = 40$ oraz $a - b = 8$. Oblicz $a + b$.
10. Wiadomo, że $a \cdot b = 5$ oraz $a^2 + b^2 = 15$. Oblicz $a + b$.
11. Udowodnij, że poniższe liczby są złożone:
 - a) 999 973
 - b) 1 000 343
 - c) 99 999 271
 - d) 999 999 271
12. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.
13. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$, dla których liczba $n^3 - 1$ jest pierwsza.
14. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których liczba $n^3 + 1$ jest pierwsza.
15. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n > 2$, liczba $n^4 - 1$ może być zapisana w postaci iloczynu trzech liczb całkowitych większych od 1.
16. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n > 2$, liczba $n^8 - 1$ może być zapisana w postaci iloczynu czterech liczb całkowitych większych od 1.
17. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n > 2$, liczba $n^6 - 1$ może być zapisana w postaci iloczynu czterech liczb całkowitych większych od 1.

18. Znajdź wszystkie x spełniające równanie $x^2 = 6x - 9$.

19. Znajdź wszystkie x spełniające równanie $4x^2 = 12x - 9$.

20. Oblicz $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

21. Niech a będzie taką liczbą, że $a + \frac{1}{a} = 3$. Oblicz $a^2 + \frac{1}{a^2}$.

22. Dane są liczby dodatnie a, b , które spełniają równości

$$a + \frac{1}{b} = 4 \quad \text{oraz} \quad b + \frac{1}{a} = 5.$$

Wyznacz wartość wyrażenia $ab + \frac{1}{ab}$.

23. Wyznacz wszystkie liczby naturalne a i b spełniające równanie $a^2 = b^2 + 97$.

24.* Dane są takie niezerowe liczby rzeczywiste a, b , że $a + b \neq 0$ oraz spełniona jest równość

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b}.$$

Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}.$$

25. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczba $a + b$ jest podzielna przez 7 oraz liczba $a^3 + b^3$ jest liczbą pierwszą?

26.* Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których $p + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (1 etap OMJ 2023/2024) Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które można zapisać jako różnicę sześcianów dwóch liczb pierwszych.

K2. (1 etap OMJ 2016/2017) Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie

$$(a + b + c)(a + b - c) = c^2.$$

Wykaż, że $a + b = c = 0$.

K3. (2 etap OMJ 2017/2018) Czy istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x o tej własności, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a + x)^2 + (b + x)^2 = (c + x)^2?$$