

Lista 13

Okręgi opisane na wielokątach

1. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O tak, że punkt O leży na boku AB tego trójkąta. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle ACB$.

2. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O tak, że punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC . Wiedząc, że $\sphericalangle ACB = \alpha$, oblicz miarę kąta $\sphericalangle AOB$.

Wskazówka: Niech punkt D będzie punktem przecięcia okręgu i prostej AO . Co wiemy o kątach w trójkącie ABD ?

3. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

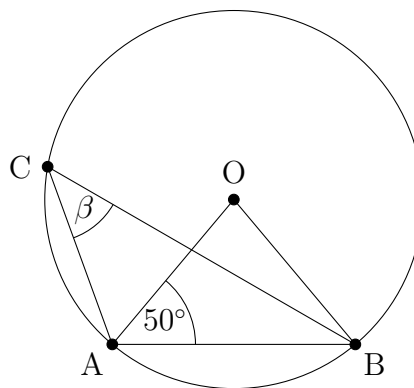
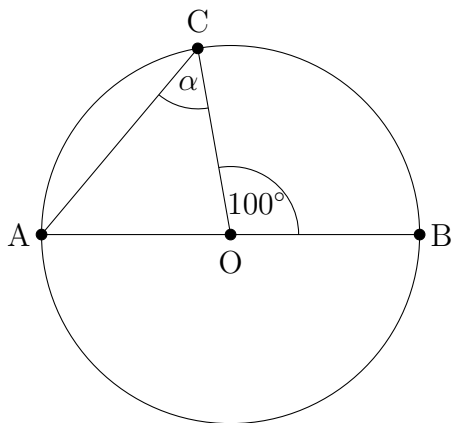
Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle ACB$.

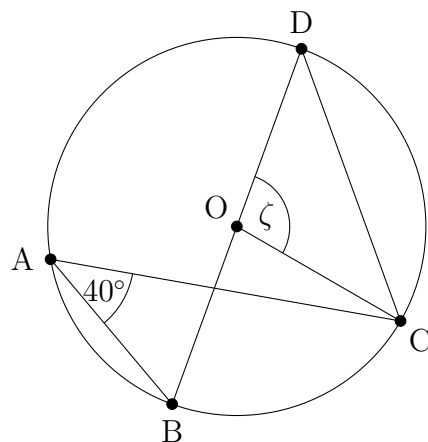
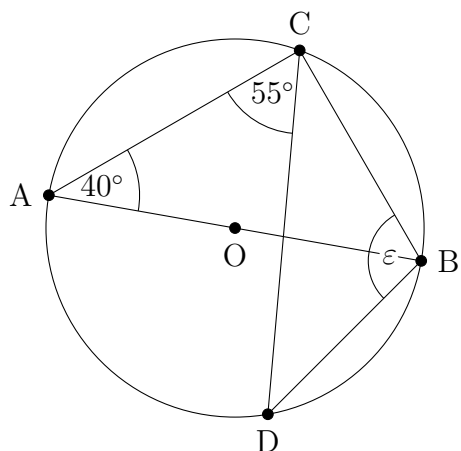
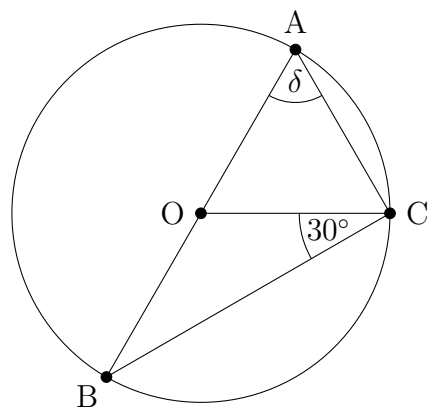
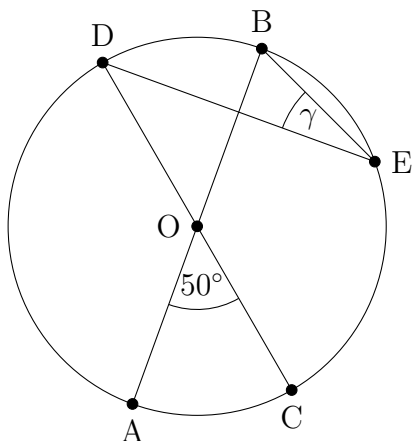
4. Jeśli w poprzednim zadaniu wyszło Ci, że miara kąta $\sphericalangle ACB$ jest jednoznacznie wyznaczona przez warunki zadania, wiesz co masz zrobić.

5. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskaż taką liczbę k , że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym.

a) $i = 1, j = 2$, b) $i = 1, j = 5$, c) $i = 1, j = 6$, d) $i = 1, j = 7$.

6. Oblicz miarę kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ i η na poniższych obrazkach, wiedząc, że na każdym z nich punkt O jest środkiem okręgu.

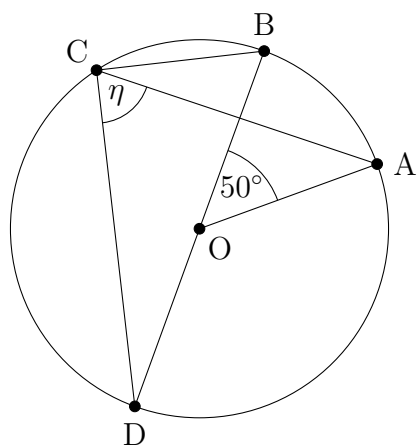




7. Przekątna AC czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg jest średnicą tego okręgu. Niech K będzie punktem na BD takim, że $\sphericalangle AKB = 90^\circ$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CAD$.

8. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{11}$. Połącz podane czworokąty w pary czworokątów przystających.

- a) $A_1A_2A_4A_9$
- b) $A_1A_3A_7A_{11}$
- c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
- d) $A_1A_6A_9A_{10}$
- e) $A_1A_4A_6A_{11}$
- f) $A_1A_2A_3A_9$
- g) $A_1A_6A_8A_{11}$
- h) $A_1A_3A_4A_8$



9. Rozstrzygnij, dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie: Każdy n -ką **równoboczny** wpisany w okrąg jest foremny.

10. Rozstrzygnij, dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie: Każdy n -ką **równokątny** wpisany w okrąg jest foremny.

11. Na okręgu o promieniu $\sqrt{8}$ wybrano punkty A i B , takie że miara kąta wpisanego opartego na łuku AB jest równa 45° . Wyznacz długość odcinka AB .

12. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Udowodnij, że jeśli przekątne AC i BD przecinają się w punkcie, który jest środkiem tego okręgu, to $ABCD$ jest prostokątem.

13. Dany jest 180-kąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{180}$. Podaj miarę kąta

- a) $\sphericalangle A_1A_2A_7$, b) $\sphericalangle A_1A_4A_7$, c) $\sphericalangle A_1A_{11}A_7$, d) $\sphericalangle A_1A_7A_{11}$.

14. Na boku A_1A_2 n -kąta foremnego $A_1A_2 \dots A_n$ zbudowano kwadrat A_1A_2BC w taki sposób, że wnętrze kwadratu jest rozłączne z wnętrzem n -kąta foremnego. Dla podanej liczby n podaj miarę kąta $\sphericalangle A_2BA_3$.

- a) $n = 3$, b) $n = 5$, c) $n = 6$, d) $n = 9$.

15. Na boku A_1A_2 n -kąta foremnego $A_1A_2 \dots A_n$ zbudowano trójkąt równoboczny A_1A_2B w taki sposób, że wnętrze trójkąta jest rozłączne z wnętrzem n -kąta foremnego. Dla podanej liczby n podaj miarę kąta $\sphericalangle A_2BA_3$.

- a) $n = 4$, b) $n = 5$, c) $n = 9$, d) $n = 12$.

16. Dany jest 18-kąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{18}$ wpisany w okrąg o promieniu 1. Dla podanej liczby n podaj zbiór wszystkich takich liczb $k \in \{1, 2, 3, \dots, 18\}$, że cięciwa A_nA_k ma długość 1.

- a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 10$, d) $n = 18$.

17. Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n -kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli

- a) $k = 2$, b) $k = 3$, c) $k = 5$, d) $k = 10$.

18. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskaż trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

- a) A_1A_7 , A_3A_9
b) A_1A_5 , A_2A_8
c) A_1A_5 , A_3A_7
d) A_1A_6 , A_4A_9

19. Dany jest trójkąt ABC . Wykaż, że symetralna boku AB i dwusieczna kąta ACB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Wskazówka: Oznacz punkt przecięcia okręgu z symetralną przez D i pokaż że dwusieczna też przez niego przechodzi, tzn. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$.

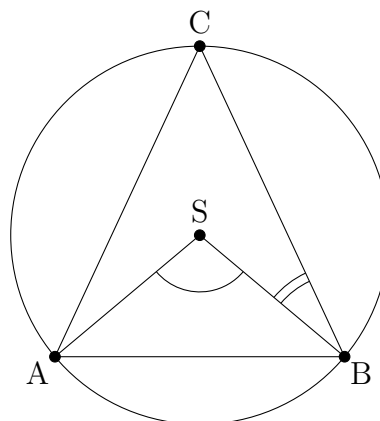
20. Wierzchołki $BCDE$ pięciokąta $ABCDE$ leżą na okręgu o środku A oraz miara kątów wewnętrznych $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BCD = 360^\circ$. Udowodnij, że $BE = DE$.

21. Dla których liczb naturalnych n istnieje n -kąć wypukły, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60° lub 160° ?

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (finał WKM dla gimnazjów 2007/2008) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 10 cm i 20 cm. Na krótszej przyprostokątnej – jako na średnicy – zbudowano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie okrąg podzielił przeciwprostokątną

K2. (matura 2013/2014) Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC , o ramionach AC i BC , leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek). Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC .



K3. (finał OMJ 2023/2024) Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Punkty P , Q , R leżą odpowiednio na bokach AB , BC , CA tego trójkąta, przy czym czworokąt $CQPR$ jest równoległobokiem. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Własności:

- Przez dowolne trzy punkty nieleżące na jednej prostej można poprowadzić okrąg (więc na każdym trójkącie da się opisać okrąg).
- Jeśli kąt wpisany w okrąg oparty na łuku AB ma miarę α , to wszystkie inne kąty wpisane oparte na łuku AB mają miarę α , a kąt środkowy oparty na łuku AB ma miarę 2α .
- Miara kąta wpisanego opartego na średnicy jest równa 90° .
- Czworokąt może być wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego dwóch przeciwległych kątów wynosi 180° .
- Liczba przekątnych w n -kącie foremnym wynosi $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.
- Suma miar kątów w n -kącie wynosi $180^\circ \cdot (n - 2)$.
- Miara kąta w n -kącie foremnym wynosi $\frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$.
- Suma miar kątów zewnętrznych w wielokącie wypukłym wynosi 360° .