

Lista 4

Zasada szufladkowa

1. Udowodnij, że wśród dowolnych 11 liczb całkowitych zawsze znajdują się takie dwie, które mają taką samą cyfrę jedności.
2. Do Instytutu Matematycznego przyjechało 80 uczniów, a w sali WS jest 11 rzędów krzeseł. Udowodnij, że niezależnie od tego jak w tej sali usiądą, w pewnym rzędzie będzie przynajmniej 8 osób.
3. Udowodnij, że wśród 101 liczb naturalnych znajdują się takie dwie, których różnica będzie podzielna przez 100.
4. Udowodnij, że w dowolnej grupie n osób ($n \geq 2$) można znaleźć dwie osoby, które wśród pozostałych osób tej grupy mają taką samą liczbę znajomych.
5. Spośród liczb 1, 2, 3, ..., 9 wybrano sześć. Udowodnij, że wśród wybranych liczb są takie dwie, których suma wynosi 10.
6. Udowodnij, że wśród dowolnych 7 różnych liczb całkowitych muszą być takie 2, których suma lub różnica dzieli się przez 10.
- 7.* Danych jest 2026 liczb całkowitych. Wykaż, że zawsze można spośród nich wybrać trzy liczby a, b, c takie, że $a(b - c)$ jest podzielne przez 2026.
8. Przy okrągłym stole usiadło 20 ambasadorów. Nie zauważyli oni jednak, że na stole stoją plakietki z ich nazwiskami i nikt nie usiadł na przewidzianym dla niego miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić stół, żeby przynajmniej dwie osoby siedziały na właściwym miejscu.
9. Spośród liczb 1, 2, ..., 100 wybrano 51. Udowodnij, że:
 - a) różnica pewnych dwóch wynosi 1,
 - b)* pewne dwie z nich są względnie pierwsze,
 - c)* są takie dwie, że jedna dzieli się przez drugą.
10. Spośród przekątnych ośmiokąta foremego wybieramy 4. Udowodnij, że wśród wybranych przekątnych są dwie o tej samej długości.
11. Umieszczono 33 wieże na szachownicy 8×8 . Udowodnij, że można wybrać 5 z nich, które nawzajem się nie atakują.

- 12.** W trójkącie równobocznym o boku 10 wybrano 101 punktów. Udowodnij, że pewne dwa punkty są odległe o co najwyżej 1.
- 13.** W kwadracie o boku długości 10 wybrano 101 punktów. Udowodnij, że pewne dwa punkty są odległe o co najwyżej $\frac{3}{2}$.
- 14.** Udowodnij, że wśród liczb $1, 11, 111, \dots$ jest nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 17.
- 15.*** Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej istnieje taka jej niezerowa wielokrotność, że w jej zapisie występują tylko cyfry 0 i 1.
- 16.** Danych jest 11 liczb rzeczywistych. Udowodnij, że co najmniej dwie spośród nich mają rozwinięcia dziesiętne pokrywające się na nieskończonej ilości miejsc po przecinku.
- 17.** Udowodnij, że istnieją liczby naturalne k, l ($k > l$), dla których liczba $7^k - 7^l$ jest podzielna przez 10^{2000} .
- 18.** W trójkącie równobocznym o boku długości 12 umieszczono 300 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.
- 19.*** Dana jest tabela rozmiaru 65×5 . W każdą kratkę tabeli wpisano $+1$ albo -1 . Dowieść, że można wybrać takie 3 wiersze i 3 kolumny tej tabeli, że wszystkie liczby stojące na przecięciach tych wierszy i kolumn są jednakowe.
- 20.** Na bokach oraz przekątnych pięciokąta (niekoniecznie foremnego) zaznaczono w sumie 33 punkty. Udowodnij, że można narysować taką prostą, że leżą na niej co najmniej 4 zaznaczone punkty.
- 21.** Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Wykaż, że środek jednego z odcinków o końcach w tych punktach też jest punktem kratowym.
- 22.*** Na płaszczyźnie danych jest 10 punktów kratowych. Wykaż, że jeden z odcinków o końcach w tych punktach przechodzi też przez przynajmniej dwa inne punkty kratowe.
- 23.*** Każdy punkt kratowy na płaszczyźnie pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i wierzchołkach w punktach kratowych jednakowego koloru.
- 24.*** Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele prostokątów spełniających warunki poprzedniego zadania.

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (2 etap OMJ 2005/2006) Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

K2. (2 etap OMJ 2023/2024) Na tablicy znajduje się osiemset dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 21. Czteryście z tych liczb zapisano niebieską kredą, a czteryście – żółtą. Wykaż, że można zmazać pewne liczby z tablicy (co najmniej jedną, ale nie wszystkie) w taki sposób, aby suma pozostałych na tablicy niebieskich liczb była równa sumie pozostałych na tablicy żółtych liczb.

K3. (finał OMJ 2021/2022) Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1. Punkty K , L , M , N , różne od wierzchołków kwadratu, leżą odpowiednio na odcinkach AB , BC , CD , DA . Wykaż, że obwód przynajmniej jednego z trójkątów ANK , BKL , CLM , DMN jest mniejszy od 2.