

Lista 5

Działania na polach figur

1. Wykaż, że środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.
2. Odcinki AB i CD są podstawami trapezu $ABCD$, a E punktem przecięcia przekątnych tego trapezu. Wykaż, że trójkąty AED i BEC mają równe pola.
3. W trójkącie ABC niech M będzie środkiem boku AB , N środkiem boku BC , a O – punktem przecięcia odcinków CM i AN . Wykaż, że trójkąt ACO i czworokąt $BMON$ mają równe pola.
4. W kwadracie $ABCD$, punkt M jest środkiem boku BC , a punkt N leży na odcinku AM . Wykaż, że trójkąty ANB i ANC mają równe pola.
5. We wnętrzu równoległoboku $ABCD$ zaznaczono punkt E . Wykaż, że suma pól trójkątów ABE i CDE jest równa połowie pola tego równoległoboku.
6. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC równoległoboku $ABCD$, a T punktem przecięcia odcinków AN i DM . Wykaż, że pola trójkąta ADT i czworokąta $BNTM$ są równe.
- 7.* W równoległoboku $ABCD$ zaznaczono punkt K na boku AB i punkt L na boku BC . Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AL i CK . Wykaż, że jeśli trójkąty AKP i CLP mają równe pola, to trójkąty AKD i CLD mają równe pola.
8. Punkty M i N są środkami boków BC i CD czworokąta $ABCD$. Wykaż, że pole czworokąta $AMCN$ jest równe połowie pola czworokąta $ABCD$.
9. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i CD . Wykaż, że pole czworokąta $AKCL$ jest równe połowie pola czworokąta $ABCD$.
10. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty M , N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Proste AN i DM przecinają się w punkcie P , a proste BN i CM przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że suma pól trójkątów APD i BCQ jest równa polu czworokąta $PNQM$.
- 11.* Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą na boku AB , przy czym $AK = KL = LB$, a punkty M , N leżą na boku CD , przy czym $CM = MN = ND$. Wykaż, że pole czworokąta $KLMN$ jest równe jednej trzeciej pola czworokąta $ABCD$.

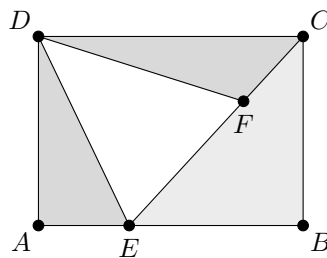
12. W równoległoboku $ABCD$ na przekątnej BD zaznaczono punkt P . Wykaż, że trójkąty ABP i BCP mają równe pola.

13. Wykaż, że dowolne trójkąty ABC i XYZ , dla których zachodzą równości $AB = XY$, $BC = YZ$ i $\sphericalangle ABC + \sphericalangle XYZ = 180^\circ$, mają równe pola.

14. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym przekątna AD jest równoległa do boku BC , a przekątna CE jest równoległa do boku AB . Wykaż, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.

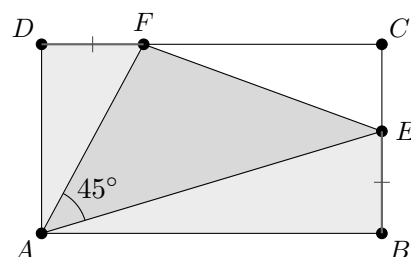
ZADANIA KONKURSOWE

K1. (1 etap OMJ 2022/2023) Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt E leży na boku AB , a punkt F leży na odcinku CE . Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola, to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.



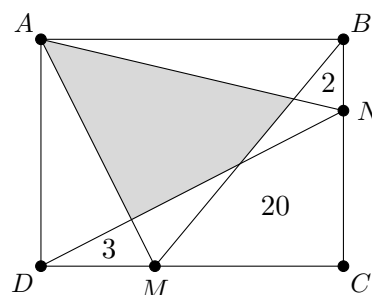
Rysunek do zadania K1

K2. (1 etap OMJ 2019/2020) Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\angle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Wykaż, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF .



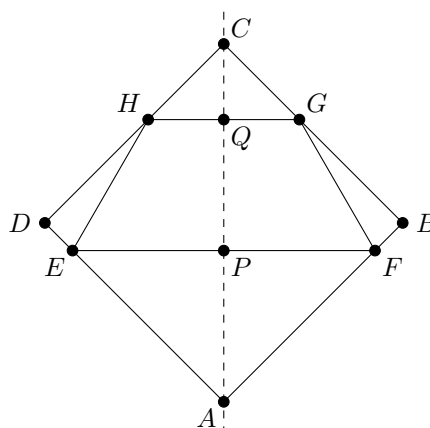
Rysunek do zadania K2

K3. (finał WKM 2023/2024) Dany jest prostokąt $ABCD$. Odcinki poprowadzone z punktów M i N do wierzchołków prostokąta dzielą ten prostokąt na osiem rozłącznych części. Na rysunku zaznaczono pola trzech z nich. Jakie jest pole zacieniowanej części?



Rysunek do zadania K3

K4. (zDolny Ślązaczek 2018/2019) W kwadracie $ABCD$ umieszczono trapez $EFGH$ o bokach długości 2, 2, 2, 4 tak, że te czworokąty mają wspólną oś symetrii, a wierzchołki trapezu leżą na bokach kwadratu (patrz rysunek). O ile większe jest pole kwadratu od pola trapezu?



Rysunek do zadania K4

K5. (1 etap OMG 2007/2008) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A , punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B , punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C , punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D . Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

K6. (2 etap OMG 2007/2008) Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS , CDS , EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

K7. (2 etap OMJ 2021/2022) W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$\sphericalangle CDE = 90^\circ, \quad AC = AD \quad \text{oraz} \quad BD = BE.$$

Wykaż, że trójkąt ABD i czworokąt $ABCE$ mają równe pola.

Uwaga: Wielokąt nazywamy wypukłym, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą od 180° .

K8. (2 etap OMJ 2017/2018) Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AC \neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnij, że pola czworokątów $AKOC$ oraz $BKOC$ są równe.

Uwaga: Środek okręgu opisanego na trójkącie to punkt, w którym przecinają się wszystkie symetralne boków tego trójkąta.

K9. (próbna matura rozszerzona 2014/2015) W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD i wyznaczono na niej taki punkt E , że $\frac{CE}{ED} = \frac{1}{3}$. Prosta przechodząca przez punkty AE przecina bok BC w punkcie P . Wykaż, że $\frac{CP}{PB} = \frac{1}{6}$.

Wskazówka: Zaznacz odcinek BE .

K10. (2 etap OMG 2008/2009) Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC . Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE . Na prostej k obieramy takie punkty K , L , że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

K11. (Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy woj. śląskiego 2002/2003) Bok BC trójkąta ABC ma długość 12. Poprowadzono środkową DB boku AC . Znajdź długości odcinków na które bok BC jest podzielony przez prostą przechodzącą przez wierzchołek A i środek środkowej BD .