

Lista 14

Nierówności między średnimi

Instytut Matematyczny UWr

Zajęcia uniwersyteckie SP76 klasa 8E

Niech a, b, c, x będą liczbami nieujemnymi.

1. Udowodnij, że $3a^2b \leq a^5 + a + b^3$.
2. Udowodnij, że $3a^3 \leq a^6 + a^2 + a$.
3. Udowodnij, że $3a^2b \leq 2a^3 + b^3$.
4. Udowodnij, że $a^3 + 2 \geq 3a$.
5. Udowodnij, że $(a + b + c)^3 \geq 27abc$.
6. Udowodnij, że $3x + \frac{1}{x^3} \geq 4$.
7. Udowodnij, że $3a^2b \leq a^3 + 4b^3$.
8. Udowodnij, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.
9. Udowodnij, że $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$.
10. Udowodnij, że $a^4b + ab^4 \leq a^5 + b^5$.
11. Udowodnij, że $a^3b^2 + a^2b^3 \leq a^5 + b^5$.
12. Udowodnij, że $5a \leq a^5 + 4$.
13. Udowodnij, że $5a^3 \leq 3a^5 + 2$.
14. Udowodnij, że $4ab \leq 2a^2 + b^4 + 1$.
15. Udowodnij, że $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.
16. Udowodnij, że $11a^2b^2 \leq 7a^3 + 3b^7 + ab$.
17. Udowodnij, że $2ab \leq a^2 + b^3 + \frac{4}{27}$.
18. Udowodnij, że $\sqrt[3]{a^2b + ab^2} \leq \frac{2}{3}(a + b)$.
19. Udowodnij, że $27 \cdot (a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \leq 8 \cdot (a + b + c)^3$.
20. Udowodnij, że $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 \geq 3\sqrt{ab}$.
21. Udowodnij, że $\sqrt[10]{2} < \frac{11}{10}$.

22. Prostopadłościan ma pole powierzchni całkowitej równe P , a jego objętość jest równa V . Udowodnij, że

$$V^2 \leq \frac{P^3}{216}.$$

23. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Udowodnij, że

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab < 8.$$

24. Wyznacz wszystkie trójki liczb dodatnich (x, y, z) spełniające równania:

$$xyz = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3.$$