

Lista 6

Podzielności

1. Oblicz

- a) $\text{NWD}(16^{16}, 20^{20})$,
- b) $\text{NWD}(24^{24}, 27^{27})$,
- c) $\text{NWD}(48^{48}, 54^{54})$.

2. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich m, n spełniające warunek

$$m^2 n^3 = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^5.$$

3. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez 5^{100} . Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 5?

4. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez 6^{1000} . Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 6?

5. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez 8. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 4?

6. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez $5^3 \cdot 3^5$. Dla jakiej największej liczby całkowitej d możemy stąd wywnioskować, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d ?

7. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez $19^3 \cdot 7^5$. Dla jakiej największej liczby całkowitej d możemy stąd wywnioskować, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d ?

8. Wskaż możliwie najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k , dla której

- a) liczba 45^{45} jest kwadratem liczby całkowitej;
- b) liczba 20^{20} jest sześcianem liczby całkowitej;
- c) liczba 28^{28} jest sześcianem liczby całkowitej.

9. Ile jest takich liczb całkowitych dodatnich $n \leq 100$, że liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej?

10. Ile jest takich liczb całkowitych dodatnich $n \leq 100$, że liczba n^n jest sześcianem liczby całkowitej?

11. Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

12. Udowodnij, że suma trzech kolejnych potęg 2 jest podzielna przez 7.

13. Udowodnij, że $3^n + 3^{n+2}$ ma cyfrę jedności równą 0 dla każdej liczby naturalnej n .

14. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x i y dla których

$$xy + x + y + 1 = 0.$$

15. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x i y dla których

$$xy + 2x + 3y + 6 = 0.$$

16. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x i y dla których

$$xy + 10 = 5x + 2y.$$

17. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x dla których

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 12.$$

18. Wyznacz wszystkie liczby **całkowite** x i y dla których

$$xy = 2x + 3y - 7.$$

19. Wyznacz wszystkie liczby **naturalne** x i y dla których

$$xy + 2x + 2y = 31.$$

20. Dane są liczby całkowite a, b, c takie, że $ab + c = bc$. Udowodnij, że c jest podzielne przez b .

21. Dane są liczby całkowite a, b, c takie, że $4a + 3b + c$ jest podzielne przez $2a + b$. Udowodnij, że $b + c$ też jest podzielne przez $2a + b$.

22. Dane są takie liczby całkowite k, l , że liczba $k + 100l$ jest podzielna przez 101. Wykaż, że liczba $100k + l$ też jest podzielna przez 101.

23.

24. Znajdź wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) , że zachodzi podzielność $ab \mid a^2 + b$.

25. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że $n + 2 \mid 3n + 21$.

26.* Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite a, b , dla których

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2027}$$

Wskazówka: 2027 jest liczbą pierwszą.

27. Iloczyn dwóch dodatnich liczb całkowitych a, b jest szóstą potęgą liczby całkowitej. Wiadomo również, że liczba a jest kwadratem, a liczba b jest sześcianiem liczby całkowitej. Wykazać, że liczby a i b są też szóstymi potęgami liczb całkowitych.

ZADANIA KONKURSOWE

K1. (2 etap OMJ 2021/2022) Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz jej dodatnie dzielniki a i b , które spełniają równość $a + b + ab = n$. Wykaż, że $a = b$.

K2. (2 etap OMJ 2020/2021) Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , dla których liczba $5a + 3b$ jest podzielna przez liczbę $a + b$. Wykaż, że $a = b$.

K3. (1 etap OMJ 2025/2026) Dana jest liczba całkowita n o tej własności, że liczba $2n$ jest sześcianiem liczby całkowitej, a liczba $3n$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 108.

K4. (2 etap OMJ 2010/2011) Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$.

Wskazówka: Czy $a^2 - b^2$ jest podzielne przez $a + b$?

K5. (Finał OMJ 2015/2016) Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n , że liczba $m + n^2$ jest podzielna przez $m + n$. Wykaż, że liczba $m + n^3$ jest podzielna przez $m + n$.

K6. (Finał OMJ 2022/2023) Dane są liczby całkowite a i b , przy czym $a > b > 1$ oraz liczba b jest największym z tych dzielników liczby a , które są różne od a . Udowodnij, że liczba $a + b$ nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.